

## Φυλλάδιο 7

### Πρόβλημα 1

Ένα αραιό αέριο περιέχεται σε ένα δοχείο όγκου  $V$  και έχει πίεση  $P$ . Υποθέτοντας ότι η ταχύτητα των μορίων ακολουθεί κατανομή Maxwell, υπολογίστε τον ρυθμό με τον οποίο το αέριο ρέει έξω από το δοχείο, στο κενό, μέσω μίας μικρής οπής διατομής  $A$ .

$$\text{Απάντηση} \quad -\frac{\delta N}{\delta t} = A \sqrt{\frac{nP}{2\pi m}}$$

### Πρόβλημα 2

Μία μονοδιάστατη αλυσίδα αποτελείται από  $n$  στοιχεία, με  $n \gg 1$ . Το κάθε στοιχείο έχει μήκος  $a$ , και το συνολικό μήκος της αλυσίδας είναι  $x$ . Να υπολογίσετε

- α) Την εντροπία της αλυσίδας σαν συνάρτηση του μήκους  $x$ .
- β) Την σχέση μεταξύ θερμοκρασίας και τάσης, έτσι ώστε το μήκος της αλυσίδας να παραμένει σταθερό.

$$\text{Απάντηση} \quad \alpha) \frac{S}{nk_B} = \ln 2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{an}\right) \ln \left(1 + \frac{x}{an}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{an}\right) \ln \left(1 - \frac{x}{an}\right)$$

$$\beta) \mathcal{T} = \frac{k_B T}{2a} \ln \frac{1 + \frac{x}{an}}{1 - \frac{x}{an}}$$

### Πρόβλημα 3

Για ένα αρμονικό ταλαντωτή με μάζα  $m$  και συχνότητα  $\omega$ , να υπολογίσετε

- α) Την συνάρτηση επιμερισμού
  - 1) Στην ημικλασική προσέγγιση.
  - 2) Κβαντομηχανικά.
- β) Για  $N$  κβαντικούς ταλαντωτές να βρείτε σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας
  - 1) Την εσωτερική ενέργεια.

- 2) Την εντροπία.  
3) Την ειδική θερμότητα.

Απάντηση

$$\alpha 1) Z_1^{CM} = \frac{k_B T}{\hbar \omega}$$

$$\alpha 2) Z_1^{QM} = \frac{1}{2 \sinh \frac{\hbar \omega}{2 k_B T}}$$

$$\beta 1) U = N \hbar \omega \left( \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\beta 2) S = N k_B \left[ \frac{\beta \hbar \omega}{2} \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2} - \ln \left( 2 \sinh \frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right]$$

$$\beta 3) C = N k_B \frac{(\beta \hbar \omega)^2}{4 \sinh^2 \frac{\beta \hbar \omega}{2}}$$

#### Πρόβλημα 4

Ένα τέλειο αέριο αποτελείται από  $N$  μη διακρίσιμα σωματίδια και περιγράφεται από την χαμιλτονιανή,

$$H = \sum_{i=1}^N c p_i \quad (\text{υπερσχετικιστικά σωματίδια}).$$

Στην ημικλασική προσέγγιση να υπολογίσετε

- α) Την συνάρτηση επιμερισμού  
β) Την ελεύθερη ενέργεια  
γ) Την πίεση  
δ) Την εσωτερική ενέργεια  
ε) Την ειδική θερμότητα

Απάντηση

$$\alpha) Z = \frac{1}{N!} \left( 8\pi \frac{V}{(\beta \hbar c)^3} \right)^N$$

$$\beta) F = -N k_B T \ln \left( 8\pi e \left( \frac{k_B}{\hbar c} \right)^3 \frac{V}{N} T^3 \right)$$

$$\gamma) P = \frac{N k_B T}{V}$$

$$\delta) U = 3N k_B T$$

$$\epsilon) C = 3N k_B$$