

Φυλλάδιο 6

Πρόβλημα 1

Ένα σύστημα αποτελείται από N σωματίδια, που το καθένα απ'αυτά, μπορεί να βρεθεί σε δύο καταστάσεις με ενέργειες ϵ_1, ϵ_2 με $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Να υπολογίσετε

- α) Την μέση ενέργεια σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας.
- β) Την μέση ενέργεια στο όριο $T \rightarrow \infty$
- γ) Την μέση ενέργεια στο όριο $T \rightarrow 0$
- δ) Σε ποια θερμοκρασία υπάρχει αλλαγή στην συμπεριφορά της μέσης ενέργειας.

Απάντηση

$$\begin{aligned} \alpha) \bar{E}(T) &= N \frac{\epsilon_1 e^{-\beta \epsilon_1} + \epsilon_2 e^{-\beta \epsilon_2}}{e^{-\beta \epsilon_1} + e^{-\beta \epsilon_2}} \\ \beta) \bar{E}(T \rightarrow \infty) &= N \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \\ \gamma) \bar{E}(T \rightarrow 0) &= N \epsilon_1 \\ \delta) T_c &\sim \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{k_B} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Στην κλασική θεωρία του μαγνητισμού οι μαγνητικές ροπές είναι διανύσματα $\vec{\mu}$, με όλες τις δυνατές κατευθύνσεις στο χώρο. Η ενέργεια αλληλεπίδρασης με ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, ενώ ο αριθμός των καταστάσεων σε μια στερεά γωνία $d\Omega$ είναι ανάλογος της στερεάς γωνίας $d\Omega$.

- α) Βρείτε την μαγνήτιση σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας και του μαγνητικού πεδίου, για N τέτοιες μαγνητικές ροπές.
- β) Βρείτε την μαγνητική επιδεκτικότητα για μικρά μαγνητικά πεδία.

Απάντηση

$$\begin{aligned} \alpha) \langle \mu_z \rangle &= N \mu \left(\coth \frac{\mu B}{k_B T} - \frac{k_B T}{\mu B} \right) \\ \beta) \chi &= \frac{1}{3} \frac{N \mu^2}{k_B T} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε την μέση τετραγωνική διακύμανση (διασπορά) του μέτρου της ταχύτητας¹.

$$\text{Απάντηση} \quad \langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} \left(3 - \frac{8}{\pi} \right)$$

Πρόβλημα 4

Για την κινητική ενέργεια ενός ατόμου να βρείτε

- α) Την μέση ενέργεια.
- β) Την μέση τιμή του τετραγώνου της ενέργειας.
- γ) Την μέση τιμή του τετραγώνου της διακύμανσης της ενέργειας.

$$\begin{aligned} \text{Απάντηση} \quad \alpha) \bar{E} &= \frac{3}{2} k_B T \\ \beta) \overline{E^2} &= \frac{15}{4} (k_B T)^2 \\ \gamma) \langle (\Delta E)^2 \rangle &= \frac{15}{4} (k_B T)^2 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 5

Βρείτε την κατανομή πιθανότητας για την κινητική ενέργεια ενός ατόμου.

$$\text{Απάντηση} \quad dw_\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(k_B T)^{3/2}} \sqrt{\epsilon} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon$$

Χρήσιμα ολοκληρώματα

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (1)$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \left(-\frac{d}{da} \right)^n I_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

¹Οι μέσες τιμές δηλώνονται είτε μέσα σε αγκύλες, είτε με μία μπάρα πάνω από την αντίστοιχη ποσότητα.